М. М. ЗАКЪ
Инженеръ.

ОСНОВЫ
ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

Опредѣленіе ошибокъ.
Способъ наименьшихъ квадратовъ.



ИЗДАНІЕ Г. В. ГОЛЬСТЕНА
С. Петербургъ. Загородный пр. 13.
1912.

Типографія М. И. Акинфіева. Басковъ пер., 10.

Математика завоевываетъ все новыя и новыя области знанія, какъ чистаго, такъ и прикладного, и впереди всѣхъ математическихъ дисциплинъ шествуетъ теорія вѣроятностей. Потому то знакомство съ нею и является почти всегда очень важнымъ и часто даже необходимымъ. Между тѣмъ большинство сочиненій излагающихъ эту теорію, требуетъ для ознакомленія съ нею большой затраты времени и труда.

Настоящая книжка написана для тѣхъ, кто, желая ознакомиться съ главнѣйшими выводами и приложеніями теоріи вѣроятностей, для примѣненія ихъ въ опытныхъ наукахъ или въ инженерномъ и военномъ искусствахъ, лишенъ возможности, за недостаткомъ ли времени или математической подготовки, ознакомиться съ этой теоріей по имѣющимся сочиненіямъ. Въ виду этого *«Основы теоріи вѣроятностей»* составлены такъ, что самыя элементарныя свѣдѣнія изъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія вполнѣ достаточны для пониманія всего въ нихъ изложеннаго, а для пониманія первой главы достаточно и одного знанія элементарной математики.

Книжка эта могла бы, кромѣ того, послужить еще введеніемъ къ изученію капитальныхъ трудовъ по исчисленію вѣроятностей (А. А. Маркова, J. Bertrand'а, H. Poincaré и др.), требующихъ однако болѣе солидной математической подготовки.

Быть можетъ эти нѣсколько страницъ побудятъ иныхъ изъ читателей заняться болѣе основательно изученіемъ теоріи вѣроятностей и послужатъ, такимъ образомъ, пусть и въ слабой степени, дальнѣйшему расширенію области примѣненія этой теоріи.

За всякія указанія на допущенный недосмотръ или предложенія исправленій я буду всегда весьма благодаренъ

М. З.

При составленіи этихъ «Основъ теоріи вѣроятностей» я пользовался слѣдующими книгами:

А. А. Марковъ. Исчисленіе вѣроятностей. Спб. 1908

В. П. Ермаковъ. Теорія вѣроятностей. Кіевъ. 1879.

В. П. Ермаковъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ. Кіевъ. 1905.

М. Тихомандрицкій. Курсъ теоріи вѣроятностей. Харьковъ. 1898.

Н. Маіевскій. Изложеніе способа наименьшихъ квадратовъ и примѣненіе его преимущественно къ изслѣдованію результатовъ стрѣльбы. Спб. 1881.

Н. Забудскій. Теорія вѣроятностей и примѣненіе ея къ стрѣльбѣ и пристрѣлкѣ. Спб. 1898.

J. Bertrand. Calcul des probabilités. 1907.

H. Poincaré. Leçons sur le calcul des probabilités 1896

H. Poincaré. La Science et l'Hypothèse.

M. d'Ocagne. Notions élémentaires sur la probabilité des erreurs. 1910.

R. de Montessus Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités. 1908.

E. Borel. Eléments de la théorie des probabilités. 1910.

Helmert. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 1907.

ОСНОВЫ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

Опредѣленіе ошибокъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ.

ГЛАВА I

Основныя понятія и теоремы теоріи вѣроятностей

§ 1 Предметъ теоріи вѣроятностей Понятіе о вѣроятности столь обычно, что, казалось бы, его опредѣленіе не должно представлять какихъ либо затрудненій. Однако, какъ въ большинствѣ подобныхъ случаевъ, это опредѣленіе дать не такъ легко. Вѣроятность какого-нибудь событія опредѣляется обыкновенно какъ отношеніе числа случаевъ благопріятныхъ этому событію къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ. Достаточно ли такое опредѣленіе? Слѣдующій примѣръ поможетъ намъ въ этомъ разобраться

Мы бросаемъ двѣ шестигранныхъ игральныхъ кости Какова вѣроятность, что одна изъ нихъ покажетъ 6?

Число всѣхъ возможныхъ случаевъ $6 \times 6 = 36$, число случаевъ благопріятныхъ—11; слѣдовательно, искомая вѣроятность—$\frac{11}{36}$. Но можно разсуждать еще иначе число возможныхъ соединеній изъ цыфръ обѣихъ игральныхъ костей $\frac{6 \times 5}{2} + 6 = 21$ число соединеній благопріятныхъ—6, слѣдовательно, искомая вѣроятность $\frac{6}{21}$ Очевидно, что вышеприведенное опредѣленіе вѣроятности недостаточно.

Мы будемъ исходить изъ слѣдующаго опредѣленія вѣроятности

Вѣроятностью событія называется отношеніе числа равновозможныхъ случаевъ, благопріятныхъ этому событію, къ числу всѣхъ равновозможныхъ случаевъ со отвѣтствующихъ вопросу.

Это опредѣленіе отличается отъ вышеприведеннаго тѣмъ что въ немъ введено новое понятіе, равновозможности, понятіе, само по себѣ еще требующее опредѣленія. Но опредѣленіе этого новаго понятія приведетъ насъ снова къ понятію вѣроятности. Получается какъ бы заколдованный кругъ! Изъ этого круга имѣется только одинъ выходъ: условимся, *чтб* считать въ каждомъ *частномъ* случаѣ равновозможнымъ, и тогда, исходя изъ даннаго выше опредѣленія вѣроятности, мы получимъ уже только одно соотвѣтствующее ему, то есть правильное рѣшеніе задачи. Такъ, въ приведенномъ примѣрѣ, не всѣ соединенія равновозможны, такъ какъ однихъ соединеній возможно одно (1.1, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5, 6.6), а другихъ— два (1.2 и 2.1, и т. д.); слѣдовательно второе рѣшеніе задачи невѣрно. Не всегда, однако, такъ легко установить равновозможность случаевъ и вслѣдствіе этого задача можетъ усложниться. Что же тогда является критеріемъ правильности по лучаемаго рѣшенія? Какъ и въ экспериментальныхъ наукахъ— опытъ. Страховое дѣло, которое всецѣло основано на теоріи вѣроятностей, а также астрономія, физика, геодезія и статистика, въ которыхъ примѣняются нѣкоторые выводы этой теоріи, служатъ наилучшимъ доказательствомъ, что рѣшенія, даваемыя теоріей вѣроятностей, правильны.

§ 2. Нѣкоторыя основныя свойства вѣроятности. Пусть V число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, n число случаевъ благопріятныхъ; тогда вѣроятность даннаго событія $p = \frac{n}{V}$. Такимъ образомъ, вѣроятность есть дробь всегда меньшая единицы; когда эта дробь становится равной единицѣ вѣроятность превращается въ увѣренность

Мы назовемъ событія *единственно возможными*, если одно изъ нихъ навѣрно должно случиться

Мы назовемъ событія *несовмѣстными*, если каждое изъ нихъ исключаетъ остальныя, такъ что невозможно одновременное существованіе какихъ бы то ни было двухъ изъ этихъ событій.

Мы назовемъ два единственно возможныхъ и несовмѣстныхъ событія *противоположными*

Если въ сосудѣ содержится N шаровъ, изъ которыхъ

n бѣлыхъ, а остальные другого цвѣта (красные, зеленые и т. д.) то вѣроятность вынуть бѣлый шаръ $p = \frac{n}{N}$, а вѣроятность вынуть какой нибудь другой шаръ $q = \frac{N-n}{N}$ такъ какъ въ первомъ случаѣ число благопріятныхъ событій равно n а во второмъ—$N-n$. Отсюда $p + q = \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N} = 1$.

Сумма вѣроятностей двухъ противоположныхъ событій равна единицѣ.

§ 3. Сложеніе вѣроятностей. Пусть въ сосудѣ содержится a бѣлыхъ, b черныхъ шаровъ; остальные шары — не бѣлые и не черные. Всего шаровъ N *). Вѣроятность вынуть бѣлый шаръ $\alpha = \frac{a}{N}$, вѣроятность вынуть черный— $\beta = \frac{b}{N}$.

Вѣроятность p вынуть бѣлый *или* черный шаръ равна $\frac{a+b}{N}$ т. е. $p = \alpha + \beta$. Такимъ образомъ, *вѣроятность случиться одному изъ несовмѣстныхъ событій, безъ указанія какому именно, равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.* При примѣненіи этой теоремы слѣдуетъ всегда имѣть въ виду, что она справедлива лишь по отношенію къ событіямъ несовмѣстнымъ.

§ 4. Умноженіе вѣроятностей. Пусть дано два сосуда; въ первомъ содержится N шаровъ, изъ которыхъ a бѣлыхъ, во второмъ — N' шаровъ, изъ которыхъ a' бѣлыхъ. Вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ перваго сосуда $\alpha = \frac{a}{N}$, вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ второго сосуда $\beta = \frac{a'}{N'}$. Какова вѣроятность вынуть изъ каждаго сосуда одновременно или послѣдовательно бѣлый шаръ? Всѣхъ возможныхъ случаевъ NN', такъ какъ каждому шару вынутому изъ перваго сосуда, соотвѣтствуетъ N' шаровъ вынутыхъ изъ второго **). Число случаевъ благопріятныхъ—aa'. Вѣроятность вынуть послѣдовательно изъ каждаго сосуда бѣлый шаръ — $p = \frac{aa'}{NN'} = \alpha\beta$. Эти соображенія могутъ быть распростра

*) $N > a + b$.

**) Мы предполагаемъ, что вынувъ шаръ мы затѣмъ кладемъ его обратно въ сосудъ

нены на нѣсколько сосудовъ. Такимъ ообразомъ, *вѣроятность случиться нѣсколькимъ независимымъ событіямъ вмѣстѣ равна произведенію вѣроятностей каждаго изъ нихъ.*

Если событія зависятъ другъ отъ друга, то вѣроятность случиться этимъ событіямъ вмѣстѣ равна произведеніе вѣроятностей, вычисленныхъ для каждаго изъ нихъ въ предположеніи, что всѣ ему предшествующія события имѣютъ мѣсто.

§ 5. Примѣры. 1. Въ сосудѣ содержится N шаровъ, изъ которыхъ a бѣлыхъ Вынимаютъ послѣдовательно 3 шара Какова вѣроятность, что всѣ три—бѣлые?

Вѣроятность, что первый шаръ—бѣлый, равна $\frac{a}{N}$ Предположимъ что первое событіе имѣетъ мѣсто, т е. что первый вынутый шаръ оказался бѣлымъ, тогда вѣроятность того, что и второй шаръ бѣлый, равна $\frac{a-1}{N-1}$, такъ какъ въ сосудѣ осталось всего N—1 шаровъ, изъ которыхъ бѣлыхъ a—1. Предположимъ далѣе что и второе событіе имѣетъ мѣсто т. е. что и второй вынутый шаръ оказался бѣлымъ, тогда вѣроятность того, что и третій шаръ—бѣлый, равна $\frac{a-2}{N-2}$,такъ какъ въ сосудѣ осталось всего $V-2$ шара, изъ которыхъ былыхъ a—2.

Вѣроятность, что всѣ три шара, вынутые послѣдовательно,—бѣлые, на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей равна $\frac{a(a-1)(a-2)}{N(N-1)(N-2)}$

2. Въ сосудѣ содержится N шаровъ, изъ которыхъ a бѣлыхъ, остальные — черные. Какова вѣроятность, что, если вынуть изъ сосуда одновременно или послѣдовательно *) два шара, одинъ изъ нихъ окажется чернымъ, а другой—бѣлымъ?

Вѣроятность что первый шаръ окажется бѣлымъ равна $\frac{a}{N}$

Предположимъ, что первое событіе имѣетъ мѣсто, т. е. что первый вынутый шаръ оказался бѣлымъ, тогда вѣроятность того, что второй шаръ — черный, равна $\frac{N-a}{N-1}$, такъ какъ черныхъ шаровъ N—a, а всего шаровъ осталось N—1 На

*) При послѣдовательномъ выниманія въ сосудъ не возвращаютъ обратно вынутаго шара.

основанiи теоремы умноженiя вѣроятностей, вѣроятность того что первый вынутый шаръ—бѣлый а второй—черный, равна $\frac{a}{N}\cdot\frac{N-a}{N-1}$ Такимъ же образомъ можно доказать, что вѣроятность того что первый шаръ—черный а второй — бѣлый равна $\frac{N-a}{N}\cdot\frac{a}{N-1}$. Вѣроятность того что одинъ изъ шаровъ окажется бѣлымъ, а другой—чернымъ на основанiи теоремы сложенiя вѣроятностей равна $\frac{a}{N}\cdot\frac{N-a}{N-1}+\frac{N-a}{N}\cdot\frac{a}{N-1}=$ $=\frac{2a(N-a)}{N(N-1)}$.

§ 6 Вѣроятность при повторенiи испытанiй Пусть A и B два противоположныхъ событiя, вѣроятности которыхъ p и q, тогда $p+q=1$

Если произведено $(m+n)$ испытанiй, то вѣроятность того, что событiе A произойдетъ въ данномъ порядкѣ m разъ и не произойдетъ n разъ, т. е. что событiе B произойдетъ n разъ, равна, на основанiи теоремы умноженiя вѣроятностей, $p^m q^n$ *).

Порядокъ, въ какомъ могутъ произойти $(m+n)$, событiй, можетъ быть видоизмѣненъ столько разъ, сколько можно сдѣлать перемѣщенiй изъ $(m+n)$ предметовъ, т е. $1\ldots(m+n)$ Въ данномъ случаѣ имѣется m одинаковыхъ событiй A и n одинаковыхъ событiй B; слѣдовательно, порядокъ ихъ можетъ быть видоизмѣненъ лишь столько разъ, сколько можно сдѣлать перемѣщенiй изъ $(m+n)$ предметовъ, среди которыхъ имѣется по m и n одинаковыхъ т е. $\frac{1\ldots\ldots(m+n)}{1\ldots m.1\ldots n}=C^m_{m+n}$ Для каждаго *даннаго* порядка вѣроятность того, что событiе A произойдетъ m разъ и не произойдетъ n разъ, равна $p^m q^n$, слѣдовательно, по теоремѣ сложенiя вѣроятностей, вѣроятность того, что событiе A произойдетъ въ *любомъ* порядкѣ, m разъ и не произойдетъ n разъ, равна $C^m_{m+n}\, p^m q^n$

Если мы разложимъ $(p\xi+q)^{m+n}$ по формулѣ бинома то коэффицiентъ при ξ^m равенъ $C^m_{m+n}\, p^m q^n$

Такимъ образомъ, *если для $(m+n)$ независимыхъ испытанiй вѣроятность событiя A выражается числомъ p*

---

*) Если вѣроятность того что событiе A произойдетъ одинъ разъ равна p, то вѣроятность того, что событiе A произойдетъ два раза, равна p^2 и т. д

то вѣроятность, что событіе A появится въ эти $(m+n)$ испытаній ровно m разъ, равна коэффиціенту при ξ^m въ разложеніи $(p\xi+q)^{m+n}$ по формулѣ бинома, при чемъ $q = 1 - p$

§ 7 Законъ большихъ чиселъ. Обозначимъ число произведенныхъ испытаній $(m+n)$ черезъ k, т. е. положимъ $m+n=k$. Задаимся цѣлью найти для произвольно заданныхъ величинъ p и k наивѣроятнѣйшее значеніе для m, т. е то значеніе, для котораго коэффищентъ при ξ^m въ разложеніи $(p\xi+q)^k$ — наибольшій.

Если мы возьмемъ отношенія коэффищента при ξ^m къ коэффищентамъ при ξ^{m-1} и ξ^{m+1}, то отношенія эти для искомаго значенія m должны быть больше 1

Отношенія эти напишутся:

$$\frac{C_k^m p^m q^{k-m}}{C_k^{m+1} p^{m-1} q^{k-m+1}} = \frac{p}{q}\,\frac{k-m+1}{m} > 1$$

$$\frac{C_k^m p^m q^{k-m}}{C_k^{m-1} p^{m+1} q^{k-m-1}} = \frac{q}{p}\,\frac{m+1}{k-m} > 1$$

или

$$pk - pm + p > mq \quad \text{и} \quad mq + q > pk - pm$$

или

$$pk - q < m < pk + p, \text{ такъ какъ } p + q = 1$$

Числа $pk - q$ и $pk + p$ отличаются другъ отъ друга только на одну единицу $[pk + p - (pk - q) = p + q = 1]$, поэтому если $pk - q$ число дробное то и $pk + p$ также число дробное.

Такъ какъ число m можетъ быть только цѣлымъ числомъ (m обозначаетъ число событій A), то это и есть ближайшее къ pk цѣлое число. Если же $pk + p$ число цѣлое, то и $pk - q$ также число цѣлое и нѣтъ никакого цѣлаго числа m, которое удовлетворяло бы вышеприведеннымъ неравенствамъ Въ этомъ случаѣ можно положить $m_1 = pk - q$ и $m_2 = pk - p = m_1 + 1$, т е существуетъ два наивѣроятнѣйшихъ числа появленій событія A.

Неравенство $pk - q < m < pk + p$ можетъ быть еще написано такъ $p - \frac{q}{k} < \frac{m}{k} < p + \frac{p}{k}$. Слѣдовательно, *при безпредѣльномъ возрастаніи числа испытаній k, отношеніе наивѣроятнѣйшаго числа m появленій событія A къ*

числу испытаній k приближается къ предѣлу p такъ какъ $\frac{q}{k}$ и $\frac{p}{k}$ стремятся къ нулю

§ 8 Вѣроятность гипотезъ **Формула Байеса.** Даны n сосудовъ A_1 A_2 $A_3 \dots A_n$. Въ каждомъ изъ этихъ сосудовъ содержится извѣстное число бѣлыхъ и черныхъ шаровъ Отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ общему числу шаровъ, содержащихся въ каждомъ изъ сосудовъ A равно соотвѣтственно: p_1 p_2 $p_3 \dots p_n$.

Изъ одного изъ сосудовъ вынутъ шаръ который оказался бѣлымъ. Какова вѣроятность, что шаръ этотъ вынутъ изъ сосуда A_1?

Эту вѣроятность, въ отличіе отъ выше разсмотрѣнной, называемой вѣроятностью a priori назовемъ вѣроятностью a posteriori.

Обозначимъ её через P_1.

Вѣроятность, что вынутый шаръ находился въ одномъ изъ сосудовъ A_1 $A_2 \dots A_n$, обозначимъ соотвѣтственно через π_1 $\pi_2 \dots \pi_n$

Тогда вѣроятность что вынутый шаръ окажется бѣлымъ на основаніи теоремъ умноженія и сложенія вѣроятностей, равна $p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \dots + p_n\pi_n$ *)

Выше мы обозначили через P вѣроятность, что вынутый шаръ, оказавшійся бѣлымъ, вынутъ именно изъ сосуда A_1 Такимъ образомъ, вѣроятность, что вынутый шаръ окажется бѣлымъ и находился въ сосудѣ A_1, на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей, равна $(p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \dots p_n\pi_n)P$

Съ другой стороны, вѣроятность эта выражается еще через $p_1\pi_1$ *) Слѣдовательно $(p_1\pi_1 + \qquad + p \; \pi \;) P = p_1$

Отсюда получаемъ:

$$P_1 \quad \frac{p_1\pi_1}{p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \dots + p_n\pi_n}$$

Это выраженіе носитъ названіе формулы Байеса

§ 9. Примѣры 1. Къ экзамену на которомъ требуется знакомство съ 30 вопросами явилось 6 лицъ. Одно изъ этихъ лицъ знакомо со всѣми 30 вопросами, второе — съ 25, третье — съ 20, четвертое—съ 15 пятое съ 10 и шестое—съ 5

---

*) Вѣроятность, что вынутый шаръ *находился въ сосудѣ* A_n, равна π_n; вѣроятность, что *шаръ этотъ—бѣлый*, равна p_n; вѣроятность, что шаръ этотъ—*бѣлый и находился въ сосудѣ* A_n, равна $\pi_n p_n$ Слѣдовательно, вѣроятность, что вынутый шаръ *бѣлый и* находился *въ одномъ изъ сосудовъ* A равна $p_1\pi_1 + \qquad p_n\pi_n$.

Первое изъ экзаменовавшихся лицъ отвѣтило удовлетворительно на предложенный вопросъ. Какова вѣроятность что это—лицо, знакомое *со всѣми* вопросами?

Вѣроятность à priori π равна $\frac{1}{6}$ дѣйствительно, экзаменующихся—6 и вѣроятность, что лицо, экзаменующееся одно любое, изъ нихъ очевидно равна $\frac{1}{6}$.

Вѣроятности, p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 что лицо, которому заданъ вопросъ, знакомо съ нимъ, равны соотвѣтственно, для знакомаго со всѣми вопросами единицѣ для знакомаго съ 25 вопросами $\frac{25}{30}$ или $\frac{5}{6}$ и т. д.

Вѣроятность à posteriori P_1, что лицо, удовлетворительно отвѣтившее на вопросъ, есть именно лицо, знакомое со всѣми вопросами равна, по формулѣ Байеса

$$P_1 = \frac{p_1 \pi}{\pi(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6} = \frac{1}{\frac{1}{6}(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)} = \frac{6}{21}$$

Такимъ же образомъ можно показать, что вѣроятность P_2, что это лицо есть лицо знакомое только съ 25 вопросами, равна $\frac{5}{21}$, съ 20 вопросами $\frac{4}{21}$ и т. д.

2. Вѣроятность свидѣтельскихъ показаній. Изъ сосуда, въ которомъ содержится 5 черныхъ и 15 бѣлыхъ шаровъ, вынутъ шаръ. Свидѣтель, присутствовавшій при выниманіи шара, утверждаетъ, что вынутый шаръ—черный. Какова вѣроятность, что показаніе свидѣтеля соотвѣтствуетъ истинѣ?

Для рѣшенія задачи нужно сдѣлать допущеніе относительно вѣроятности à priori π, т. е. вѣроятности, что свидѣтель вообще говоритъ правду. Предположимъ, что вѣроятность эта равна $^9/_{10}$. Вѣроятность p что вынутый шаръ черный, равна $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Тогда вѣроятность P à posteriori, т. е. вѣроятность, что показаніе свидѣтеля, утверждающаго, что вынутый шаръ—черный, соотвѣтствуетъ дѣйствительности, по формулѣ Байеса, равна *)

*) Вѣроятности à priori слѣдующія: вѣроятность, что свидѣтель говоритъ правду π, что свидѣтель говоритъ неправду $1-\pi$; вѣроятность, что вынутый шаръ—черный p что вынутый шаръ—бѣлый $1-p$.

$$P = \frac{p\pi}{p\pi + (1-p)(1-\pi)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{3}{4}$$

Такимъ же ооразомъ можно показать что вѣроятность истинности *согласнаго* показаніи двухъ свидѣтелей равна $\frac{27}{28}$ *).

Если свидѣтель, присутствовавшій при выниманія шара утверждаетъ, что вынутый шаръ—бѣлый, то вѣроятность, что показаніе свидѣтеля соотвѣтствуетъ истинѣ, равна $\frac{27}{28}$ *)

Вѣроятность истинности согласнаго показанія двухъ свидѣтелей въ этомъ случаѣ равна $\frac{243}{244}$.

Изъ разсмотрѣнія этихъ случаевъ можно сдѣлать слѣдующіе выводы.

Вѣроятность истинности показанія свидѣтеля (или свидѣтелей) зависитъ отъ вѣроятности событія о которомъ идетъ рѣчь

Если событіе невозможно, то никакія свидѣтельскія показанія не могутъ сообщить ему даже малой вѣроятности

*) Вѣроятность, что оба свидѣтеля говорятъ правду π^2 что говорятъ неправду $(1-\pi)^2$

**) Въ этомъ случаѣ π, какъ и раньше равно $\frac{9}{10}$, но $p = \frac{3}{4}$.

ГЛАВА II

Опредѣленіе ошибокъ

§ 1 Законъ Гаусса. Положимъ, что, приступая къ измѣренію какихъ-нибудь величинъ, мы уже знаемъ дѣйствительныя ихъ значенія. Эти дѣйствительныя значенія могутъ напр. опредѣляться или математическими свойствами величинъ (сумма угловъ треугольника и т. д.) или предыдущими, болѣе точными, измѣреніями или цѣлымъ рядомъ измѣреній, какъ то будетъ пояснено ниже

При всякомъ отдѣльномъ наблюденія хотя бы и самыми точными инструментами, мы обыкновенно получаемъ не дѣйствительное значеніе наблюдаемой величины, а значеніе, отличающееся отъ дѣйствительнаго на нѣкоторую величину, которую мы будемъ называть ошибкой наблюденія

Ошибки бываютъ двухъ родовъ: постоянныя и случайныя

Способы и пріемы опредѣлить и избѣжать первыя относятся къ методологіи опыта соотвѣтствующихъ наукъ; въ дальнѣйшемъ рѣчь будетъ только о вторыхъ

Пусть a – дѣйствительное значеніе измѣряемой величины. a' — значеніе, полученное изъ отдѣльнаго наблюденія *) тогда ошибка x равна $a'-a$

Вѣроятность, что при измѣреніи какой-нибудь величины ошибка будетъ заключаться между x и $x+dx$, равна $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} dx$ где e—основаніе неперовыхъ логариѳмовъ, а k — величина которую можно опредѣлить въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, какъ будетъ показано ниже (см. §§ 6, 7 и 8)

Вышеизложенное правило носитъ названіе закона Гаусса

*) Какъ здѣсь, такъ и въ дальнѣйшемъ предполагается что *постоянная* ошибка устранена

Мы не будемъ останавливаться на довольно сложномъ доказательствѣ этого закона, замѣтимъ только, что вѣроятность ошибки, по закону Гаусса, зависитъ лишь отъ абсолютной ея величины и не зависитъ отъ ея знака.

Распространяя законъ Гаусса на конечный промежутокъ получимъ для вѣроятности $P_{\alpha,\beta}$, что ошибка лежитъ между конечными предѣлами α β выраженіе

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-k^2x^2}\,dx$$

§ 2 Мѣра точности Замѣнимъ въ выраженіи $P_{\alpha,\beta}$ kx черезъ y· тогда

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{k}\int_{k\alpha}^{k\beta} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{k\alpha}^{k\beta} e^{-y^2}\,dy$$

Если замѣнить α и β черезъ $\frac{\alpha}{k}$ и $\frac{\beta}{k}$ то получимъ

$$P_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-y^2}\,dy$$ т. е. вѣроятность ошибка въ

промежуткѣ $\frac{\alpha}{k}$, $\frac{\beta}{k}$ не зависитъ отъ k. Другими словами если мы разсмотримъ два случая измѣренія одной и той же величины, въ которыхъ k равно соотвѣтственно k_1 и k_2, то вѣроятность что ошибка въ первомъ случаѣ лежитъ между $\frac{\alpha}{k_1}$ и $\frac{\beta}{k_1}$ равна вѣроятности что ошибка во второмъ случаѣ лежитъ между $\frac{\alpha}{k_2}$ и $\frac{\beta}{k_2}$. Но чѣмъ k больше, тѣмъ уже предѣлы ошибки (для опредѣленной вѣроятности). Изъ этого слѣдуетъ что, если мы опредѣлимъ величину k для произведенныхъ измѣреній, то вмѣстѣ съ тѣмъ мы опредѣлимъ степень ихъ точности. Коэффиціентъ k называютъ поэтому мѣрой точности.

§ 3. Нѣкоторыя формулы и таблицы. Въ исчисленіи вѣроятностей очень часто встрѣчается выраженіе $1.2.3\ldots n$, которое мы обозначимъ черезъ $n!$. Это выраженіе можетъ быть вычислено при помощи таблицы значеній эйлерова интеграла

$[\Gamma(n+1) = n!]$. (Вычисленіе этого выраженія прямымъ путемъ становится чрезвычайно затруднительнымъ уже для значеній $n > 10$).

Для опредѣленія приближеннаго значенія этого выраженія можно пользоваться слѣдующимъ неравенствомъ:

$$\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}$$

Изъ этого неравенства можно получить слѣдующія приблизительныя значенія $n!$ и $log\,(n!)$

$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}(1+\varepsilon_n)$, гдѣ ε_n стремится къ нулю при безконечномъ возрастаніи n

$log\,(n!) = (n+\frac{1}{2})\,log\,n - n + log\,\sqrt{2\pi} + \varepsilon'_n$, гдѣ ε'_n стремится къ нулю при безконечномъ возрастаніи n

Вѣроятность P_ε что ошибка по абсолютной величинѣ меньше ε равна $P_\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2x^2}dx$ Положимъ $hx = y$

тогда

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon} e^{-y^2}\,dy$$

Обозначимъ выраженіе $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} e^{-y^2}dy$ черезъ $\Theta(t)$

Ниже приводится таблица, дающая значенія функціи Θ для разныхъ значеній t

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} e^{-t^2}dt$$

t	Θ	t	Θ	t	Θ
0,00	0,0000000	0,08	0,0900781	0,16	0,1790117
0,01	0,0112833	0,09	0,1012806	0,17	0,1899923
0,02	0,0225646	0,10	0,1124630	0,18	0,2009357
0,03	0,0338410	0,11	0,1236230	0,19	0,2118398
0,04	0,0451109	0,12	0,1347584	0,20	0,2227025
0,05	0,0563718	0,13	0,1458671	0,21	0,2335218
0,06	0,0676215	0,14	0,1569470	0,22	0,2442958
0,07	0,0788577	0,15	0,1679959	0,23	0,2550225

t	Θ	t	Θ	t	Θ
0 24.	0,2657000	0 68	0 6637820	1,12.	0 8867879
0,25	0,2763263	0,69	0,6708399	1,13.	0,8899707
0,26	0,2868997	0 70	0,6778010	1 14.	0,8930823
0,27	0,2974182	0,71	0,6846654	1,15	0,8961238
0,28	0,3078800	0 72	0,6914330	1,16.	0,8990962
0,29	0,3182834	0,73	0,6981038	1,17	0,9020004
0,30	0,3286267	0,74	0,7046780	1,18.	0 90483[illegible]4
0,31	0,3389081	0,75.	0,7111556	1,19.	0 9076083
0,32	0,3491259	0,76	0,7175367	1,20.	0,9103140
0,33	0,3592785	0,77	0,7238216	1 21	0,912955[illegible]
0,34	0,3693644	0,78	0,7300104	1 22	0,9155339
0,35.	0,3793819	0,79	0 7361035	1,23	0,9180501
0,36	0,3893296	0 80	0,7421010	1,24	0,9205032
0,37	0 3992059	0 81	0 7480033	1,25	0,9229001
0,38	0,4090093	0,82	0 7538 08	1,26.	0,9252359
0,39	0,418738[illegible]	0,83	0,7595[illegible]38	1,27	0,9275136
0,40	0,4283922	0,84	0,7651427	1,28	0,9297342
0,41	0,4379690	0,85	0,7706680	1,29.	0,9318987
0,42.	0,4474676	0,86	0,7761002	1,30.	0,9340080
0,43	0,4568867	0,87	0,7814398	1,31	0,9360632
0,44	0,4662251	0,88.	0,7866873	1,32.	0 9380632
0,45	0,4754818	0,89	0,7918432	1,33	0,9400150
0,46	0,4846555	0,90	0,7969082	1,34.	0,9419137
0,47	0,4937452	0,91	0,8018828	1,35	0,9437622
0,48	0,5027498	0,92	0,8067677	1,36	0 9455614
0,49	0,5116683	0,93.	0,8115635	1,37	0,9473124
0,50	0,5204999	0,94	0,8162710	1,38.	0,9490160
0,51	0,5292437	0,95	0,8208908	1,39.	0,9506733
0,52	0,5378987	0,96.	0,8254236	1,40	0,9522851
0,53	0,5464641	0,97	0,8298703	1,41.	0,9538524
0,54	0,5549392	0,98	0,8342315	1,42	0,9553762
0,55	0,5633233	0,99	0,8385081	1,43.	0,9568573
0,56	0,5716157	1,00	0,8427008	1,44.	0,9582966
0,57	0,5798158	1,01.	0,8468105	1,45.	0,9596950
0,58	0,5879229	1,02.	0,8508380	1,46	0 9610535
0,59.	0,5959365	1,03	0,8547842	1.47	0,9623729
0,00	0,6038561	1,04	0,8586499	1,48	0,9636541
0,61.	0,6116812	1,05	0,8624360	1,49	0,9648979
0,62	0,6194114	1,06	0,8661435	1,50	0,9661052
0,63	0,6270463	1,07	0,8697732	1,51	0,9672768
0,64	0,6345857	1,08	0,8733261	1,52.	0 9684135
0,65	0,6420292	1,09	0,8768030	1,53.	0,9695162
0,66	0,6493765	1,10	0,8802050	1,54	0,9705857
0,67	0 6566275	1 11.	0 8835330	1,35	0 9[illegible]16227

t	Θ	t	Θ	t	Θ
1,56	0,9726281	2,00	0,9953223	2,44	0,9994408
1,57	0,9736026	2,01	0,9955248	2,45	0,9994694
1,58	0,9745470	2,02	0,9957195	2,46	0,9994966
1,59	0,9754620	2,03	0,9959063	2,47	0,9995226
1,60	0,9763484	2,04	0,9960858	2,48	0,9995472
1,61	0,9772069	2,05	0,9962581	2,49	0,9995707
1,62	0,9780381	2,06	0,9964235	2,50	0,9995930
1,63	0,9788429	2,07	0,9965822	2,51	0,9996143
1,64	0,9796218	2,08	0,9967344	2,52	0,9996345
1,65	0,9803756	2,09	0,9968805	2,53	0,9996537
1,66	0,9811049	2,10	0,9970205	2,54	0,9996720
1,67	0,9818104	2,11	0,9971548	2,55	0,9996893
1,68	0,9824928	2,12	0,9972836	2,56	0,9997058
1,69	0,9831526	2,13	0,9974070	2,57	0,9997215
1,70	0,9837904	2,14	0,9975253	2,58	0,9997364
1,71	0,9844070	2,15	0,9976386	2,59	0,9997505
1,72	0,9850028	2,16	0,9977472	2,60	0,9997640
1,73	0,9855785	2,17	0,9978511	2,61	0,9997767
1,74	0,9861346	2,18	0,9979505	2,62	0,9997888
1,75	0,9866717	2,19	0,9980459	2,63	0,9998003
1,76	0,9871903	2,20	0,9981372	2,61	0,9998112
1,77	0,9876910	2,21	0,9982244	2,65	0,9998215
1,78	0,9881742	2,22	0,9983079	2,66	0,9998313
1,79	0,9886406	2,23	0,9983878	2,67	0,9998406
1,80	0,9890905	2,24	0,9984642	2,68	0,9998494
1,81	0,9895245	2,25	0,9985373	2,69	0,9998578
1,82	0,9899431	2,26	0,9986071	2,70	0,9998657
1,83	0,9903467	2,27	0,9986739	2,71	0,9998732
1,84	0,9907359	2,28	0,9987377	2,72	0,9998803
1,85	0,9911110	2,29	0,9987986	2,73	0,9998870
1,86	0,9914725	2,30	0,9988568	2,74	0,9998933
1,87	0,9918207	2,31	0,9989124	2,75	0,9998994
1,88	0,9921562	2,32	0,9989655	2,76	0,9999051
1,89	0,9924793	2,33	0,9990162	2,77	0,9999105
1,90	0,9927904	2,34	0,9990646	2,78	0,9999156
1,91	0,9930899	2,35	0,9991107	2,79	0,9999204
1,92	0,9933782	2,36	0,9991548	2,80	0,9999250
1,93	0,9936557	2,37	0,9991968	2,81	0,9999293
1,94	0,9939226	2,38	0,9992369	2,82	0,9999334
1,95	0,9941794	2,39	0,9992731	2,83	0,9999372
1,96	0,9944263	2,40	0,9993115	2,84	0,9999409
1,97	0,9946637	2,41	0,9993462	2,85	0,9999443
1,98	0,9948920	2,42	0,9993793	2,86	0,9999476
1,99	0,9951114	2,43	0,9994108	2,87	0,9999507

t	Θ	t	Θ	t	Θ
2,88	0,9999536	3,29	0,9999967	3,69	,999998195[illegible]
2,89	0,9999563	3,30	0,9999969	3,70	0,9999983285
2,90	0,9999589	3,31	0,9999971	3,71	0,9999984517
2,91	0,9999613	3,32	0,9999973	3,72	0,9999985663
2,92	0,9999636	3,33	0,9999975	3,73	0,9999986726
2,93	0,9999658	3,34	0,9999977	3,74	0,9999987712
2,94	0,9999679	3,35	0,9999978	3,75	0,9999988629
2,95	0,9999698	3,36	0,9999980	3,76	0,9999989477
2,96	0,9999716	3,37	0,9999981	3,77	0,9999990265
2,97	0,9999733	3,38	0,9999982	3,78	0,999999099[illegible]
2,98	0,9999750	3,39	0,9999984	3,79	0,999999[illegible]167[illegible]
2,99	0,9999765	3,40	0,9999985	3,80	0,9999992200
3,00	0,9999779	3,41	0,9999986	3,81	0,9999992881
3,01	0,9999793	3,42	0,9999987	3,82	0,9999993342
3,02	0,9999805	3,43	0,9999988	3,83	0,9999993921
3,03	0,9999817	3,44	0,9999989	3,84	0,9999994383
3,04	0,9999829	3,45	0,9999989	3,85	0,9999994812
3,05	0,9999839	3,46	0,9999900780	3,86	0,9999995208
3,06	0,9999849	3,47	0,9999990[illegible]6[illegible]2	3,87	0,99999955[illegible]5
3,07	0,9999859	3,48	0,9999991[illegible]101	3,88	0,999999[illegible]9[illegible]
3,08	0,9999867	3,49	0,9999992[illegible]09[illegible]	3,89	0,9999996230
3,09	0,9999876	3,50	0,9[illegible]999[illegible]25691	3,90	0,999999652[illegible]
3,10	0,9999884	3,51	0,999[illegible]9[illegible]3[illegible]905	3,91	0,999999[illegible]90
3,11	0,9999891	3,52	0,9999935766	3,92	0,9999997039
3,12	0,9999898	3,53	0,9999940296	3,93	0,9999997260
3,13	0,9999904	3,54	0,99999[illegible]4519	3,94	0,999[illegible]999[illegible]482
3,14	0,9999910	3,55	0,99999[illegible]48452	3,95	0,99999976[illegible]8
3,15	0,9999916	3,56	0,999999[illegible]2115	3,96	0,9999999[illegible]860
3,16	0,9999921	3,57	0,9999955527	3,97	0,9999998028
3,17	0,9999926	3,58	0,9999958[illegible]03	3,98	0,9999998183
3,18	0,9999931	3,59	0,9999961661	3,99	0,9999998327
3,19	0,9999936	3,60	0,9999964414	4,00	0,9999998459
3,20	0,9999940	3,61	0,9999966975	4,10	0,9999999330
3,21	0,9999944	3,62	0,9999969458	4,20	0,9999999714
3,22	0,9999947	3,63	0,9999971574	4,30	0,9999999880
3,23	0,9999951	3,64	0,9999973636	4,40	0,9999999951
3,24	0,9999954	3,65	0,999999[illegible]5551	4,50	0,9999999981
3,25	0,9999957	3,66	0,9999977333	4,60	0,9999999992
3,26	0,9999960	3,67	0,9999978990	4,70	0,9999999997
3,27	0,9999962	3,68	0,9999980528	4,80	0,9999999999
3,28	0,9999965				

§ 4. Вѣроятность появленія событія данное число разъ при повтореніи испытаній. Пусть n — число испытаній, p — вѣроятность событія A, q — вѣроятность событія противопо-

ложнаго, тогда вѣроятность появленія событія A pn разъ будетъ (см. I, § 6)

$$\frac{n!}{pn!\,qn!}\,p^{pn}q^{qn}$$

Пусть n достаточно велико чтобы $n!$ можно было замѣнить черезъ $\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$ (т. е. ε_n близко къ нулю); тогда предыдущее выраженіе можетъ быть замѣнено слѣдующимъ приближеннымъ:

$$\frac{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}\;p^{pn}q^{qn}}{e^{-np}(pn)^{pn}\sqrt{2\pi np}\,e^{-qn}(qn)^{qn}\sqrt{2\pi nq}}\;{}^{*)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

Такимъ образомъ, *вѣроятность, что событіе A, при повтореніи испытаній n разъ, появится ровно pn разъ, равна (приблизительно)* $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$

При возрастаніи числа испытаній n вѣроятность полученія наиболѣе вѣроятнаго числа появленій (т е pn появленій) событія A стремится къ нулю.

Аналогичнымъ путемъ мы получимъ (приближенную) формулу, выражающую вѣроятность P_λ, что число появленій событія A отклонится отъ наивѣроятнѣйшаго числа появленій этого событія *не больше*, чѣмъ на λ.

$$P_\lambda=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}}e^{-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}\right),$$

гдѣ λ — отклоненіе въ одну какую либо сторону

Вѣроятность, что число появленій событія A отклонится отъ наивѣроятнѣйшаго числа появленій этого событія *не больше*, чѣмъ на λ, *въ ту или другую сторону* равна

$$2P_\lambda=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}}e^{-y^2}\,dy=\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}\right)$$

Число λ называется абсолютнымъ отклоненіемъ.

Абсолютное отклоненіе, дѣленное на число испы

*) $p+q=1$.

таній, т. е. $h = \frac{\lambda}{n}$, *называется относительнымъ отклоненіемъ*.

Если вѣроятность, что отклоненіе меньше λ, равна вѣроятности, что отклоненіе больше λ, то отклоненіе λ называется *вѣроятнымъ абсолютнымъ отклоненіемъ* и опредѣляется уравненіемъ:

$$\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Если вѣроятность, что отклоненіе меньше h, равна вѣроятности, что отклоненіе больше h, то отклоненіе h называется *вѣроятнымъ относительнымъ отклоненіемъ* и опредѣляется уравненіемъ

$$\Theta\left(\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{2pq}}\right) = \frac{1}{2}$$

При увеличеніи числа испытаній абсолютное вѣроятное отклоненіе растетъ, а относительное вѣроятное отклоненіе уменьшается пропорціонально $\sqrt{n}$.

§ 5. Примѣры. 1. Какова вѣроятность, что при игрѣ въ орла или рѣшетку изъ 200 разъ орелъ появится 100 разъ? *больше* 120 разъ?

Въ данномъ случаѣ $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ и $n = 200$.

Вѣроятность, что орелъ появится наивѣроятнѣйшее число разъ, т. е. $pn = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100$ разъ, выражается формулой $\frac{1}{\sqrt{2npq\pi}}$; подставляя вмѣсто p, q и n ихъ значенія получимъ

$$\frac{1}{\sqrt{2npq\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2.200\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi}} = \frac{1}{10\sqrt{\pi}} = 0,0564.$$

Вѣроятность, что отклоненіе произойдетъ въ сторону большую, равна $\frac{1}{2}$.

Вѣроятность, что отклоненіе — *не больше* λ *) равна $\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}\right)$.

*) Въ сторону большую.

Въ данномъ случаѣ $\lambda = 120 - 100 = 20$. Подставляя вмѣсто λ n p и q ихъ значенія получимъ $\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{20}{\sqrt{2.200\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{2}\Theta(2)$, значеніе $\Theta(2)$ находимъ въ таблицѣ *) равнымъ $\Theta(2) = 0{,}9953223$ т. е. $\frac{1}{2}\Theta(2) = \frac{0{,}9953223}{2}$.

Вѣроятность что отклоненіе *больше* 20 равна слѣдовательно. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta(2) = \frac{1}{2} - \frac{0{,}9953223}{2} = 0{,}002338$ т. е. чрезвычайно мала.

2. Вѣроятность одного событія 0,45, а вѣроятность событія противоположнаго 0,55. Испытаніе повторяется 20.000 разъ. Какова вѣроятность, что отклоненіе будетъ больше 500*) въ сторону событія менѣе вѣроятнаго?

Вѣроятность, что отклоненіе *меньше* 500 въ *сторону большую* **) равна по приближенной формулѣ

$$\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{500}{\sqrt{2.20000.0{,}45.0{,}55}}\right) = \frac{1}{2}\Theta(5{,}025) < \frac{1}{2}\Theta(4{,}800)$$

т. е. меньше $\frac{0{,}999999}{2}$.

Вѣроятность, что отклоненіе *больше* 500 **) *въ сторону большую*, равна ***) $\frac{1}{2} - \frac{0{,}999999}{2}$ т. е. чрезвычайно мала.

§ 6. Вѣроятная ошибка. Если вѣроятность, что ошибка по абсолютной величинѣ *меньше* ε_0 равна вѣроятности, что ошибка по абсолютной величинѣ *больше* ε_0, то ошибка ε_0 называется вѣроятной ошибкой и опредѣляется уравненіемъ (см. § 3):

$$\Theta(k\varepsilon_0) = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad k\varepsilon_0 = 0{,}4769 \text{ ****)}$$

Но ε_0 можно получить непосредственно, какъ будетъ показано ниже на примѣрѣ; такимъ образомъ, уравненіе $k\varepsilon_0 =$

---

*) На стр. 18.

**) Отъ наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія, которое равно приблизительно для событія менѣе вѣроятнаго pn т. е. 9000.

***) См. предыдущій примѣръ.

****) Эту величину мы получимъ интерполируя функцію Θ по таблицѣ на стр. 17.

0,4769 даетъ возможность опредѣлить вѣру точности h если извѣстно ε_0

Вѣроятность что ошибка меньше какой-нибудь величины мы можемъ выразить черезъ $\Theta(k\varepsilon)$, или замѣняя k черезъ $\frac{0{,}4769}{\varepsilon_0}$ черезъ $\Theta\left(0{,}4769 \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$.

§ 7. Средняя абсолютная ошибка. Прежде, чѣмъ дать опредѣленіе средней абсолютной ошибки, дадимъ опредѣленіе одного важнаго понятія, именно *математическаго ожиданія* какой-нибудь величины. *Математическимъ ожиданіемъ величины мы будемъ называть сумму произведеній каждаго изъ возможныхъ ея значеній на соотвѣтствующую вѣроятность*. Пользуясь этимъ опредѣленіемъ, мы будемъ называть *средней абсолютной ошибкой* ε_1 *математическое ожиданіе (м. о.) абсолютной величины ошибки* *) т. е

$$\varepsilon_1 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-k^2x^2}dx$$ гдѣ мы пренебрегаемъ безконечно-малыми второго порядка **).

Положимъ $k^2x^2 = t$ ***), тогда предыдущее выраженіе напишется:

$$\varepsilon_1 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-k^2x^2}dx = \frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x e^{-k^2x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}$$

Такимъ образомъ средняя абсолютная ошибка ε_1 опредѣляется уравненіемъ:

---

*) Очевидно, что м. о. алгебраической величины ошибки равно 0 такъ какъ положительныя и отрицательныя ошибки равно вѣроятны

**) Абсолютная величина ошибки въ промежуткѣ x и $x + dx$ равна $|x| + \alpha dx$, гдѣ $\alpha < 1$, вѣроятность ея по закону Гаусса $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} dx$ сумма произведеній абс. вел ошибки на соотвѣтствующую вѣроятность равна $\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [|x| + \alpha dx] e^{-k^2x^2} dx$ или пренебрегая безкон малыми 2-го порядка $\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-k^2x^2} dx$

***) $2k^2x\,dx = dt$

$$h\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642$$

Отношеніе $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = \frac{0,4769}{0,5642} = 0,8452$

§ 8. Средняя квадратичная ошибка. Мы будемъ называть *средней квадратичной ошибкой* ε_2 *корень квадратный изъ математическаго ожиданія квадрата ошибки* т. е. $\varepsilon_2^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2}dx$, гдѣ пренебрегаемъ безконечно малыми высшаго порядка.

Но $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$, откуда получаемъ, беря производныя по h, $-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} \times 2hx^2 \times dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}$, откуда

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}x^2\,dx = \frac{1}{2h^2}$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\varepsilon_2^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{2h^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

§ 9 Опредѣленіе величины вѣроятной и средней ошибокъ изъ наблюденій. Выше установлены были слѣдующія соотношенія:

$$h\varepsilon_0 = 0,4769 \quad h\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642 \quad h\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$$

Если произведено достаточно большое число наблюденій *), при чемъ полученныя ошибки записываются въ рядъ, по возрастающей абсолютной величинѣ, то *вѣроятной* ошиб-

---

*) Предполагается что дѣйствительное значеніе наблюдаемой величины извѣстно.

кой, будетъ ошибка, находящаяся въ серединѣ этого рада такъ какъ по закону большихъ чиселъ (см. I, § 7) число ошибокъ меньше ε_0 равно числу ошибокъ больше ε_0. Дѣйствительно, вѣроятность ошибокъ, по абсолютной величинѣ меньшихъ ε_0 $\frac{1}{2}$ ошибокъ—большихъ ε также $\frac{1}{2}$ если число ошибокъ n то по закону большихъ чиселъ съ возрастанiемъ n число ошибокъ меньшихъ ε_0 приближается къ $\frac{n}{2}$, число ошибокъ большихъ ε_0 также приближается къ $\frac{n}{2}$ *) Зная ε_0 не трудно получить изъ вышеприведенныхъ соотношенiй значенiя k, ε_1 и ε_2.

Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить непосредственно изъ наблюденiй **) и ε_1 и ε_2, исходя изъ слѣдующихъ соображенiй

Обозначимъ через ε', ε'' . . . . $\varepsilon^{(m)}$ ошибки лежанiя въ промежуткахъ x, $x+dx$, гдѣ x имѣетъ опредѣленныя значенiя (для каждаго ε). Пусть p_1, $p_2 \ldots p_m$ вѣроятности ошибокъ ε', ε'' . . . $\varepsilon^{(m)}$ ***) Тогда, по опредѣленiе $\varepsilon_1 = p_1|\varepsilon'| + p_2|\varepsilon''| + \ldots p_m|\varepsilon^{(m)}| = \frac{p_1 n|\varepsilon'| + p_2 n|\varepsilon''| + \ldots p_m n|\varepsilon^{(m)}|}{n}$ и $\varepsilon_2^2 = p_1\varepsilon'^2 + p_2\varepsilon''^2 + \ldots p_m\varepsilon^{(m)2} = \frac{p_1 n\varepsilon'^2 + p_2 n\varepsilon''^2 + \ldots p_m n\varepsilon^{(m)2}}{n}$, гдѣ n число наблюденiй

Если n достаточно велико, то по закону большихъ чиселъ, число ошибокъ $\varepsilon' \ldots \varepsilon^{(m)}$ т. е ошибокъ, лежащихъ въ данныхъ промежуткахъ, приближается соотвѣтственно къ $p_1 n$, $p_2 n \ldots p_m n$.

Слѣдовательно, $p_1 n|\varepsilon'| + p_2 n|\varepsilon''| + \ldots p_m n|\varepsilon^{(m)}|$ представляетъ собой сумму абсолютныхъ величинъ *всѣхъ* ошибокъ, а $p_1 n\varepsilon'^2 + p_2 n\varepsilon''^2 + \ldots p_m n\varepsilon^{(m)2}$ — сумму квадратовъ *всѣхъ* ошибокъ.

---

*) Однако предположенiе, что полученная такимъ образомъ вѣроятная ошибка не совсѣмъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности подтверждается при ближайшемъ изслѣдованiи (Гауссъ, Энке).

**) Предполагается, что дѣйствительное значенiе наблюдаемой величины извѣстно

***) $p_1 \ldots p_m$ опредѣляются по закону Гаусса выраженiемъ $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} dx$ гдѣ x имѣетъ соотвѣтствующiя значенiя

Такимъ образомъ, *для полученія средней абсолютнои ошибки нужно сумму абсолютныхъ величинъ* всѣхъ *ошибокъ раздѣлить на ихъ число; для полученія среоней квадратичной ошибки нужно сумму квадратовъ* всѣхъ *ошибокъ раздѣлить на ихъ число и изъ полученнаго извлечь квадратный корень.*

§ 10. Примѣръ. Стрѣльба изъ орудій. Для опредѣленія балистическихъ свойствъ орудій данной системы съ извѣстнымъ количествомъ этихъ орудій производится цѣлый рядъ опытовъ. Изъ этихъ опытовъ, въ числѣ прочаго, опредѣляется также вѣроятная ошибка при стрѣльбѣ (отклоненіе отъ цѣли) какъ выше было указано, для разныхъ дальностей. Въ дальнѣйшемъ рѣчь будетъ только о горизонтальномъ отклоненіи отъ цѣли. Отклоненія вправо мы будемъ считать положительными,—влѣво—отрицательными. Если вѣроятная ошибка, при данной дальности, равна a, то половина или 50% *) всѣхъ выстрѣловъ попадетъ въ полосу длиною $2a$ (a вправо отъ цѣли и a влѣво отъ цѣли).

Вѣроятность, что отклоненіе отъ цѣли равно $2a$, опредѣляется функціей Θ, въ которой аргументъ въ два раза больше чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, т. е $\Theta = 0{,}8267$ (см. таблицу)

Такимъ образомъ, 82% всѣхъ выстрѣловъ попадетъ въ полосу длиной $4a$ ($2a$ — вправо отъ цѣли и $2a$ — влѣво отъ цѣли).

Подобнымъ же путемъ мы получимъ, что 96% всѣхъ выстрѣловъ попадетъ въ полосу длиною $8a$ и т. д.

Задача. Какое число выстрѣловъ необходимо для разрушенія укрѣпленія длиною въ 20 м., если вѣроятное отклоненеіе (для даннаго разстоянія орудія отъ укрѣпленія) равно 5 м., а укрѣпленіе разрушится, если на 1 метръ длины его попадетъ 6 выстрѣловъ?

Въ разсматриваемомъ случаѣ $a = 5$ м. Слѣдовательно въ полосу длиною 20 м. попадетъ 82% всѣхъ выстрѣловъ. Для разрушенія всего укрѣпленія требуется $20 \times 6 = 120$ попаданій. Такимъ образомъ, необходимое число выстрѣловъ равно $\frac{120}{0{,}82} \sim 146$ Если a равно 10 м., то въ укрѣпленіе попадетъ только 50% всѣхъ выстрѣловъ и необходимое число выстрѣловъ будетъ $\frac{120}{0{,}50} = 240$

*) При достаточно большомъ числѣ выстрѣловъ

§ 11 Средняя ошибка функціи независимыхъ величинъ. Всѣ выводы настоящаго параграфа вѣрны и въ томъ случаѣ, если появленіе ошибокъ не слѣдуетъ закону Гаусса: достаточно, если вѣроятность появленія положительной ошибки равна вѣроятности появленія отрицательной.

Разсмотримъ сперва слѣдующій простѣйшій случай.

Пусть $X = \alpha' X_1$, гдѣ X—функція наблюдаемой величины X_1, а α'—численный коэффиціентъ; тогда ошибкѣ x_1 произведенной при измѣреніи X_1, соотвѣтствуетъ ошибка $x = \alpha' x_1$ для X а средняя квадратичная ошибка E для X получается изъ слѣдующаго выраженія $E^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} = \alpha'^2 \frac{\Sigma x_1^2}{n} = \alpha'^2 \varepsilon^2$, гдѣ n — число измѣреній, а ε — средняя квадратичная ошибка при измѣреніи X_1. Отсюда $E = \pm \alpha' \varepsilon$.

Разсмотримъ еще слѣдующій простой случай. $X = \alpha' X_1 + \alpha'' X_2 + \ldots \alpha^{(n)} X_n$ гдѣ $X_1, X_2 \ldots X_n$ независимыя другъ отъ друга величины, а $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n)}$ — численные коэффиціенты. Если $x_1, x_2, \ldots x_n$ ошибки, произведенныя при измѣреніи величинъ $X_1, X_2, \ldots X_n$ то ошибка x для X получится изъ слѣдующаго выраженія

$$X + x = \alpha'(X_1 + x_1) + \alpha''(X_2 + x_2) + \ldots \alpha^{(n)}(X_n + x_n)$$

откуда

$$x = \alpha' x_1 + \alpha'' x_2 + \ldots \alpha^{(n)} x_n$$

или

$$x^2 = (\alpha' x_1 + \alpha'' x_2 + \ldots \alpha^{(n)} x_n)^2$$

Это выраженіе можно переписать слѣдующимъ образомъ

$$x^2 = \alpha'^2 x_1^2 + \alpha''^2 x_2^2 + \ldots \alpha^{(n)2} x_n^2 + R,$$

гдѣ R — сумма удвоенныхъ произведеній изъ $\alpha^{(i)} x_i$ попарно съ разными значками

Для нахожденія средней квадратичной ошибки образуемъ слѣдующее выраженіе:

$$\Sigma x^2 = \alpha'^2 \Sigma x_1^2 + \alpha''^2 \Sigma x_2^2 + \ldots + \alpha^{(n)2} \Sigma x_n^2 + \Sigma R,$$

гдѣ знакъ Σ обозначаетъ, что берется сумма *всѣхъ* значеній полученныхъ изъ измѣреній. Въ этомъ выраженіи $\Sigma R = 0$ Для того, чтобы показать это, разсмотримъ одинъ изъ членовъ суммы R напр. $\alpha'\alpha'' x_1 x_2$. Такъ какъ, по предположенію вѣроятность положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ одинакова, то суммируя члены $\alpha'\alpha'' x_1 x_2$, мы получимъ нуль; дѣйствительно, члены положительные и отрицательные взаимно уничтожатся

Такимъ образомъ, мы получимъ

$$\Sigma x^2 = \alpha'^2 \Sigma x_1^2 + \alpha''^2 \Sigma x_2^2 + \ldots + \alpha^{(n)2} \Sigma x_n^2;$$

откуда дѣля на соотвѣтствующее число измѣреній, получимъ

$$E^2 = \alpha'^2 \varepsilon'^2 + \alpha''^2 \varepsilon''^2 + \ldots \alpha^{(n)2} \varepsilon^{(n)2}$$

или

$E = \pm \sqrt{\alpha'^2 \varepsilon'^2 + \alpha''^2 \varepsilon''^2 + \ldots + \alpha^{(n)2} \varepsilon^{(n)2}}$, гдѣ E — средняя квадратичная ошибка для X, а ε', ε'',... $\varepsilon^{(n)}$ — среднія квадратичныя ошибки при измѣреніи X_1 X_2... X_n.

Если $\varepsilon' = \varepsilon'' = \ldots = \varepsilon^{(n)} = \varepsilon$, то

$$E = \varepsilon \sqrt{\alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots + \alpha^{(n)2}}.$$

Если X *не* линейная функція величинъ X_1, X_2... X_n, то можно привести задачу къ только что указанному виду слѣдующимъ пріемомъ.

Подставимъ вмѣсто X_1, X_2... X_n ихъ значенія, найденныя изъ наблюденій, т. е. $X_1 + x_1$, $X_2 + x_2$... $X_n + x_n$, тогда получимъ

$$X + x = f(X_1 + x_1, X_2 + x_2 \ldots X_n + x_n)$$

Такъ какъ величины x_1 x_2,....x_n малы, то, разлагая $X + x$ по степенямъ этихъ величинъ, можно отбросить члены выше перваго порядка; въ результатѣ получимъ линейное уравненіе.

$$X + x = X + \alpha' x_1 + \alpha'' x_2 + \ldots \alpha^{(n)} x_n$$

или

$x = \alpha' x_1 + \alpha'' x_2 + \ldots \alpha^{(n)} x_n$, гдѣ α', α''... $\alpha^{(n)}$ численные коэффиціенты, опредѣляемые изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\alpha' = \frac{df}{dX_1},\quad \alpha'' = \frac{df}{dX_2} \ldots \alpha^{(n)} = \frac{df}{dX_n}$$

Такъ какъ вѣроятная и средняя абсолютная ошибки пропорціональны средней квадратичной, то формула

$E^2 = \alpha'^2 \varepsilon'^2 + \ldots \alpha^{(n)2} \varepsilon^{(n)2}$ примѣнима также и къ нимъ.

Пусть напр. требовалось измѣрить отрѣзокъ длиною L. Предположимъ, что, вслѣдствіе большой длины отрѣзка L измѣренія пришлось произвести надъ n отрѣзками, при чемъ пусть полученныя длины будутъ l_1, l_2,.. l_n, такъ что $L = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$. Предположимъ далѣе, что измѣренія производились надъ приблизительно равными отрѣзками, одинаковыми приборами, при неизмѣнныхъ условіяхъ, въ такомъ случаѣ можно считать, что среднія квадратичныя ошибки

для l_1 $l_2, \ldots l_n$ равны между собою. Обозначимъ эту ошибку черезъ ε; тогда ошибка E при опредѣленіи L будетъ

$$E = \varepsilon \sqrt{n}\ ^{*)}.$$

Но $n = \frac{L}{l}$, гдѣ l ооозначаетъ приблизительную длину отрѣзковъ, надъ которыми производились измѣренія; такимъ образомъ *среднія квадратичныя ошибки при опредѣленіи длины разныхъ отрѣзковъ* (при условіи, что опредѣленія эти производились одинаковымъ способомъ, т. е одинаковыми приборами, при неизмѣнныхъ условіяхъ и отрѣзки эти разбивались на меньшіе отрѣзки одинаковой длины) *пропорціональны корню квадратному изъ длины этихъ отрѣзковъ*.

Средняя квадратичная ошибка при опредѣленіи угла, очевидно, *не* зависитъ отъ величины этого угла, такъ какъ при его измѣреніи опредѣляются *всегда только два* направленія, независимо отъ величины угла

*) Такъ какъ въ данномъ случаѣ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \ldots = \varepsilon$

ГЛАВА III

Способъ наименьшихъ квадратовъ

§ 1 Опредѣленія. При помощи способа наименьшихъ квадратовъ рѣшается слѣдующая общая задача. *Для опредѣленія n величинъ* X_1 $X_2 \ldots X_n$ *произведенъ рядъ наблюденій. Каковы наиболѣе вѣроятныя значенія этихъ величинъ?* Очевидно, что задача эта *возможна* только въ томъ случаѣ, когда число уравненій, получаемыхъ изъ наблюденій или опытовъ, для опредѣленія n величинъ $X_1 \ldots X_n$ *больше* n, въ противномъ случаѣ (т. е если число уревненій равно n) возможна только одна система значеній X.

Прежде чѣмъ перейти къ изложенію способа наименьшихъ квадратовъ, дадимъ опредѣленіе *вѣса* наблюдаемой величины

Вѣсомъ наблюдаемой величины называется *квадратъ мѣры точности.* Очевидно (см. II, § 6) *вѣсъ наблюдаемой величины обратно-пропорціоналенъ квадрату средней ошибки наблюденія.* Если имѣется два ряда наблюденій, при чемъ наблюденія эти производились въ обоихъ случаяхъ одинаковыми приборами, при неизмѣнныхъ условіяхъ, то можно утверждать, что мѣры точности, въ обоихъ случаяхъ, а слѣдовательно и вѣса наблюдаемыхъ величинъ, одинаковы.

Всякое наблюденіе, въ конечномъ счетѣ, сводится къ измѣренію линейныхъ отрѣзковъ. Можно считать, что ошибки обратно-пропорціональны видимому отрѣзку, принятому за единицу измѣренія. Если мы напр. измѣряемъ температуру, то очевидно, ошибка наблюденія будетъ зависѣть отъ того, какой видимый отрѣзокъ мы примемъ равнымъ одному градусу, при чемъ совершенно неважно, чему равняется дѣйствительный отрѣзокъ, принятый за градусъ: ошибка—одинакова, наблюдаемъ ли мы по скалѣ, на которой градусъ равенъ 1 см. или же по скалѣ, на которой градусъ равенъ 1 мм., но при помощи лупы, увеличивающей въ 10 разъ. Конечно при этомъ предполагается, что какъ первая скала, такъ и вторая сдѣланы съ одинаковой точностью, т е напр до $\frac{1}{10}$ дѣленія

Точно также, при измѣреніи какой нибудь длины ошибка измѣренія зависитъ отъ видимаго отрѣзка, принятаго за единицу измѣренія. Такъ напр., если мы измѣряемую длину опредѣляемъ въ миллиметрахъ, то ошибка зависитъ отъ того, разсматриваемъ ли мы дѣленія простымъ глазомъ или въ лупу, увеличивающую въ десять разъ. Въ послѣднемъ случаѣ видимый отрѣзокъ въ десять разъ больше, чѣмъ въ первомъ, и ошибка въ десять разъ меньше. Такъ какъ вѣса наблюдаемыхъ величинъ обратно пропорціональны квадратамъ ошибокъ наблюденія, то они, въ виду вышеизложеннаго, вмѣстѣ съ тѣмъ пропорціональны квадратамъ видимыхъ линейныхъ отрѣзковъ принятыхъ за единицу измѣренія.

При опредѣленіи вѣса наблюдаемой величины слѣдуетъ также имѣть въ виду, сколько разъ приходится отмѣчать показаніи прибора и поступать по правиламъ сложенія ошибокъ

Вообще же говоря, опредѣленіе вѣса наблюдаемой величины—задача иногда довольно затруднительная, но рѣшеніе ея уже не относится къ способу наименьшихъ квадратовъ и потому здѣсь разсматриваться не будетъ. Рѣшеніе это въ каждомъ частномъ случаѣ можно найти въ спеціальныхъ сочиненіяхъ по топографіи, геодезіи, астрономіи и т д.

§ 2. Случай, когда между величинами $X_1, X_2, \ldots X_n$ не существуетъ зависимости. Для n величинъ $X_1, X_2, \ldots X_n$ изъ произведенныхъ наблюденій получено p $(p>n)$ уравненій

$$f_1(X_1, X_2, \ldots X_n) = \omega_1$$
$$f_2(X_1, X_2, \ldots X_n) = \omega_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_p(X_1, X_2, \ldots X_n) = \omega_p,$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ величины, значенія которыхъ опредѣляются изъ наблюденій.

Обыкновенно уравненія эти *несовмѣстны* Для того, чтобы сдѣлать ихъ совмѣстными, необходимо въ значенія $\omega_1 \ldots \omega_p$ внести поправки $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ Если мѣра точности даннаго наблюденія — k_i, то вѣроятность, что ошибка (поправка къ ω_i) лежитъ между ε_i и $\varepsilon_i + d\varepsilon_i$ выразится по закону Гаусса (см II § 1) формулой $\frac{k_i}{\sqrt{\pi}} e^{-k_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$ и по теоремѣ объ умноженіи вѣроятностей вѣроятность для всей системы значеній $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ выразится черезъ

$$\frac{k_1 k_2 \ldots\ldots k_p}{(\sqrt{\pi})^p} e^{-(k_1^2\varepsilon_1^2 + k_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots k_p^2\varepsilon_p^2)} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_p$$

Если бы величины $X_1, X_2 \ldots X_n$ были извѣстны, а наблюденія не были сдѣланы, то вѣроятность системы ошибокъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$, т. е. вѣроятность a priori, выразилась бы черезъ выведенную выше формулу т. е. черезъ

$$\frac{k_1 k_2 \ldots k_p}{(\sqrt{\pi})^p} e^{-(k_1^2 \varepsilon_1^2 + k_2^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + k_p^2 \varepsilon_p^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_p$$

Но наблюденія сдѣланы и ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ случились; при этихъ условіяхъ вѣроятность какой нибудь системы значеній $X_1, X_2 \ldots X_n$, т. е. вѣроятность a posteriori, будетъ, по формулѣ Байеса (см. I, § 8), пропорціональна вѣроятности a priori т. е.

$$\frac{k_1 k_2 \ldots k_p}{(\sqrt{\pi})^p} e^{-(k_1^2 \varepsilon_1^2 + k_2^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + k_p^2 \varepsilon_p^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_p.$$

Наибольшее значеніе это выраженіе получаетъ при наименьшемъ значеніи суммы: $k_1^2 \varepsilon_1^2 + k_2^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + k_p^2 \varepsilon_p^2$ *)

Но $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ равны соотвѣтственно

$$\varepsilon_1 = \omega_1 - f_1 (X_1, X_2, \ldots X_n)$$
$$\varepsilon_2 = \omega_2 - f_2 (X_1, X_2, \ldots X_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_p = \omega_p - f_p (X_1, X_2, \ldots X_n)$$ гдѣ $X_1, X_2, \ldots X_n$ искомыя величины.

Наиболѣе вѣроятныя значенія для этихъ величинъ будутъ тѣ при которыхъ выраженіе

$$k_1^2 \varepsilon_1^2 + k_2^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + k_p^2 \varepsilon_p^2 = \sum_{i=1}^{i=p} k_i^2 [f_i (X_1 X_2 \ldots X_n) - \omega_i]^2 = \varphi (X_1, X_2, \ldots X_n)$$ будетъ имѣть наименьшее значеніе т. е. при которыхъ $\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} = 0, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial X_n} = 0$

§ 3 Примѣръ. Мы измѣрили p разъ одну и ту же величину X и получили для нея значенія $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$, при чемъ вѣса наблюдаемыхъ величинъ соотвѣтственно равны $k_1^2, k_2^2, \ldots k_p^2$. Каково наиболѣе вѣроятное значеніе X? Уравненія $f_1, f_2 \ldots f_p$ въ данномъ случаѣ напишутся $X = \omega_1$, $X = \omega_2, \ldots X = \omega_p$, а $\varphi (X) = \sum_{i=1}^{i=p} k_i^2 (X - \omega_i)^2$ откуда $\frac{\partial \varphi}{\partial X} =$

$$= 2 \sum_{i=1}^{i=p} k_i^2 (X - \omega_i) = 2 X \sum_{i=1}^{i=p} k_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{i=p} k_i^2 \omega_i = 0$$

---

*) Для упрощенія можно всегда одно изъ k_i положить равнымъ 1, а остальные выразить, основываясь на замѣчаніи въ концѣ § 1 настоящей главы.

Такимъ образомъ, $X = \frac{\Sigma k_i^2 \omega_i}{\Sigma k_i^2}$ Это выраженіе объясняетъ между прочимъ, почему k_i^2 названо вѣсомъ наблюдаемой величины

Если $k_1 = k_2 = \ldots = k_p$ то $X = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \omega_i}{p}$ т. е. равно среднему ариѳметическому изъ ω.

Примѣчаніе. Рѣшеніе системы уравненій $\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} = 0 \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial X_n} = 0$ не всегда такъ просто, какъ въ приведенномъ случаѣ.

Затрудненіе появляется, когда уравненія $f_1, f_2 \ldots f_p$ не линейны. Въ этомъ случаѣ ихъ приводятъ къ линейнымъ уравненіямъ слѣдующимъ пріемомъ. Изъ уравненій $f_1, f_2 \ldots f_p$ выбираютъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ $X_1, X_2 \ldots X_n$, т. е. n; рѣшивъ эти уравненія, найдемъ для неизвѣстныхъ $X_1, X_2 \ldots X_n$ приближенныя значенія $a_1, a_2 \ldots a_n$. Положимъ $X_1 = a_1 + \xi_1$, $X_2 = a_2 + \xi_2, \ldots X_n = a_n + \xi_n$ и подставимъ ихъ въ уравненія f_i. Функціи f_i разложимъ по степенямъ $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$. Такъ какъ эти величины малы, то въ разложеніи можно отбросить члены выше перваго порядка. Въ результатѣ вмѣсто $f_1, f_2 \ldots f_p$ получимъ линейныя уравненія

§ 4. Случай, когда между величинами $X_1, X_2, \ldots X_n$ существуетъ опредѣленная зависимость.

Пусть зависимость между n величинами $X_1, X_2 \ldots X_n$ выражается q уравненіями

$$\psi_1(X_1, X_2 \ldots X_n) = 0$$
$$\psi_2(X_1, X_2 \ldots X_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_q(X_1, X_2, \ldots X_n) = 0, \text{ гдѣ } q < n.$$

Какъ и въ первомъ случаѣ изъ произведенныхъ наблюденій получено p уравненій f_i, гдѣ $p > n - q$.

Первымъ уравненіямъ величины X должны удовлетворять точно, вторымъ—лишь приближенно.

Разсуждая какъ въ первомъ случаѣ, мы придемъ къ заключенію, что наиболѣе вѣроятныя значенія величинъ $X_1, X_2, \ldots X_n$ — тѣ, для которыхъ выраженіе $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n) = \sum\limits_{i=1}^{i=p} k_i^2 (f_i - \omega_i)^2$ имѣетъ наименьшее значеніе, при чемъ

величины $X_1, X_2, \ldots X_n$ связаны между собою уравненіями $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q$. Для опредѣленія условій, при которыхъ $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$ имѣетъ наименьшее значеніе, можно основываться на слѣдующей теоремѣ: *для нахожденія наименьшаго значенія функціи $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$ n перемѣнныхъ, связанныхъ q отдѣльными уравненіями $\psi_1(X_1, X_2, \ldots X_n) = 0$, $\psi_2(X_1, X_2, \ldots X_n) = 0, \ldots \psi_q(X_1, X_2, \ldots X_n) = 0$, нужно приравнять нулю частныя производныя вспомогательной функціи $\varphi + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots + \lambda_q\psi_q$, гдѣ $\lambda_1 \ldots \lambda_q$ разсматриваются какъ постоянныя.*

Если выраженіе $\varphi + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots \lambda_q\psi_q$ мы обозначимъ черезъ $\Phi(X_1, X_2, \ldots X_n)$, то для опредѣленія наиболѣе вѣроятныхъ значеній $X_1, X_2, \ldots X_n$ получимъ слѣдующія n уравненій:

$$\frac{d\Phi}{dX_1} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dX_2} = 0, \quad \ldots \frac{d\Phi}{dX_n} = 0$$

§ 5. Примѣры. 1. При опредѣленіи угловъ $X_1, X_2, \ldots X_n$ замкнутаго многоугольника, которыхъ сумма извѣстна и должна равняться S, для этихъ угловъ получены значенія $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$.

Пусть $\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i = S + \rho$. Измѣренія производились однимъ и тѣмъ же приборомъ, при неизмѣнныхъ условіяхъ. Каковы наиболѣе вѣроятныя значенія $X_1, X_2, \ldots X_n$?

Въ данномъ случаѣ $q = 1$, а $p = n$, $\psi(X_1, X_2 \ldots X_n) = X_1 + X_2 + \ldots X_n - S = 0$ и $f_1, f_2, \ldots f_n$ равны соотвѣтственно

$$X_1 - \omega_1, \quad X_2 - \omega_2, \ldots \quad X_n = \omega_n.$$

Отсюда для $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$ получаемъ выраженіе $\varphi = -k^2 \Sigma (f_i - \omega_i)^2$, такъ какъ $k_1 = k_2 = \ldots k_n = k$ (см. II § 17), т. е. $\varphi = k^2 [(X_1 - \omega_1)^2 + (X_2 - \omega_2)^2 + \ldots (X_n - \omega_n)^2]$, откуда $\Phi(X_1, X_2, \ldots X_n) = k^2 [(X_1 - \omega_1)^2 + (X_2 - \omega_2)^2 + \ldots + (X_n - \omega_n)^2] + \lambda(X_1 + X_2 + \ldots X_n - S)$.

Такимъ образомъ для опредѣленія X намъ послужатъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{d\Phi}{dX_1} = 2k^2(X_1 - \omega_1) + \lambda = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dX_2} = 2k^2(X_2 - \omega_2) + \lambda = 0$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$\frac{d\Phi}{dX_n} = 2k^2(X_n - \omega_n) + \lambda = 0$$

Сложивъ эти n уравненій и замѣчая, что $X_1 + X_2 + \ldots + X_n - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_n) = \rho$, получимъ: $2k^2\rho + n\lambda = 0$ откуда $\lambda = -\frac{2k^2\rho}{n}$.

Подставляя это выраженіе для λ въ каждое изъ написанныхъ выше уравненій получимъ

$$X_1 = \omega_1 - \frac{\rho}{n}$$

$$X_2 = \omega_2 - \frac{\rho}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n = \omega_n - \frac{\rho}{n}$$

т. е. *разница между теоретической суммой угловъ и измѣренной должна быть распредѣлена поровну между всѣми полученными для угловъ величинами.*

2. При опредѣленіи отрѣзковъ $X_1, X_2, \ldots X_n$, которыхъ сумма извѣстна и должна равняться l, для этихъ отрѣзковъ получены значенія $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Пусть $\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i - l = \rho$. Измѣренія производились однимъ и тѣмъ же приборомъ, при неизмѣнныхъ условіяхъ. Каковы вѣроятныя значенія $X_1, X_2, \ldots X_n$?

Въ данномъ случаѣ $q = 1$, а $p = n$, $\psi(X_1, X_2, \ldots X_n) = X_1 + X_2 + \ldots X_n - l = 0$ и $f_1, f_2 \ldots f_n$ равны соотвѣтственно:

$$X_1 = \omega_1,\ X_2 = \omega_2, \ldots X_n = \omega_n$$

Отсюда для $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$ получаемъ выраженіе $= \sum_{i=1}^{i=n} k_i^2 (f_i - \omega_i)^2$ т. е. $k_1^2(X_1 - \omega_1)^2 + k_2^2(X_2 - \omega_2)^2 + \ldots + k_n^2(X_n - \omega_n)^2$, гдѣ $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$, *такъ какъ дѣло идетъ объ отрѣзкахъ разной длины* (см. II, § 11).

Такимъ образомъ для $\Phi(X_1, X_2, \ldots X_n)$ получаемъ слѣдующее выраженіе:

$\Phi(X_1, X_2, \ldots X_n) = k_1^2(X_1 - \omega_1)^2 + k_2^2(X_2 - \omega_2)^2 + \ldots + k_n^2(X_n - \omega_n)^2 + \lambda(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - l)$, откуда для опредѣленія X мы получаемъ слѣдующія уравненія

$$\frac{d\Phi}{dX_1} = 2k_1^2 \, (X_1 - \omega_1) + \lambda = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dX_2} = 2k_2^2 \, (X_2 - \omega_2) + \lambda = 0$$

. . . .

$$\frac{d\Phi}{dX_n} = 2k_n^2 \, (X_n - \omega_n) + \lambda = 0$$

Раздѣливъ каждое изъ этихъ уравненій соотвѣтственно на $\frac{1}{2k_1^2}$, $\frac{1}{2k_2^2}$, ... $\frac{1}{2k_n^2}$, сложимъ и, замѣчая, что $\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i = l - \rho$ или $l - \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i = \rho$ получимъ послѣдовательно $X_1 + X_2 + \ldots + X_n - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \ldots \frac{1}{k_n^2}\right) = 0$ или $l - \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i^2} = 0$ или $\rho + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i^2} = 0$, откуда $\lambda = \frac{-2\rho}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i^2}}$

Подставляя это выраженіе для λ въ каждое изъ написанныхъ выше уравненій, получимъ

$$X_1 = \omega_1 + \rho \frac{\frac{1}{k_1^2}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i^2}}$$

$$X_2 = \omega_2 + \rho \frac{\frac{1}{k_2^2}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i^2}}$$

$$X_n = \omega_n + \rho \frac{\frac{1}{k_n^2}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i^2}}$$

Если черезъ ε_i обозначить среднюю квадратичную ошибку, соотвѣтствующую k_i, то

$$X_i = \omega_i + \rho \frac{\varepsilon_i^2}{\Sigma \varepsilon^2}$$

Но ϵ_i пропорціонально корню квадратному изъ длины соотвѣтствующаго отрѣзка, т. е. $\sqrt{\omega}$ (см. II, § 11)

Такимъ образомъ для X получимъ

$X_i = \omega + \rho \frac{\omega_i}{\Sigma\omega_i}$, т е *разница между теоретической суммой отрѣзковъ и измѣренной должна быть распредѣлена между всѣми полученными для отрѣзковъ величинами пропорціонально этимъ величинамъ*



ОГЛАВЛЕНІЕ

—

—— —

ГОТОВИТСЯ КЪ ПЕЧАТИ ТОГО-ЖЕ АВТОР .

ОСНОВЫ
ТЕОРІИ ВОЛНЪ.

Выпускъ I.



Типографія М. И. Акинфіева, Васкова пер. 10.